Freiformkurven

Freiformkurven wurden schon früh im Schiffsbau benutzt und später vor allem in der Autoindustrie verwendet und weiterentwickelt. Sie bieten die Möglichkeit, auf einfache Weise einen „freien“ Kurvenverlauf zu gestalten, da nur einige Kontrollpunkte manipuliert werden müssen (Abbildung 1). Die Namen der beiden französischen Auto-Ingenieure **Pierre Bezier** und **Paul Casteljau** sind untrennbar mit dem Begriff der Freiformkurven verbunden. Man spricht dabei sehr oft von Bezierkurven und dem Casteljau-Algorithmus.

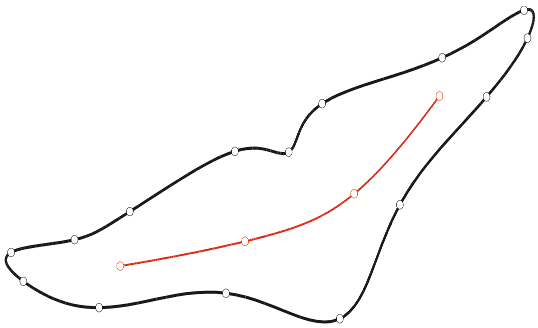

Abbildung 1 Freiformkurven

Bezier- und Splinekurven

Für die Konstruktion von **Bezierkurven** werden einzelne Basis- bzw. Kontrollpunkte verwendet, die den Verlauf der Kurve „kontrollieren“ (Abbildung 2). Bei Änderung einer der Basispunkte ändert sich die Kurve. Eine Bezierkurve ist immer eine einzige Kurve. Eine **Splinekurve** besteht hingegen immer aus mehreren Teilkurven, die zu einer Kurve zusammengesetzt sind.

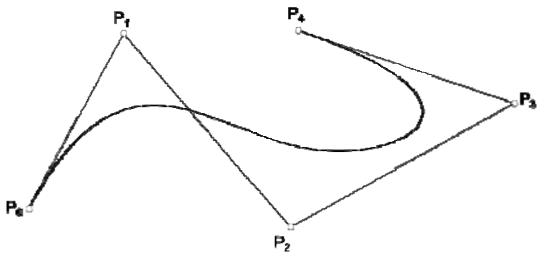

Abbildung 2 Eine Bezierkurve, die durch fünf Basispunkte P_0, ..., P_4 bestimmt ist.

Approximation und Interpolation

Von besonderer Wichtigkeit in der Technik sind Kurven, die eine vorgegebene Punktmenge **approximieren** oder **interpolieren**. Dazu gibt es spezielle Algorithmen, die das leisten. In Abbildung 3 sind eine approximierende und eine interpolierende Kurve zur selben Basispunktmenge zu sehen. Approximationskurven nehmen die Lage der vorgegebenen Punkte nur als Näherung an, Interpolationskurven verlaufen immer durch eine vorgegebene Punktmenge.

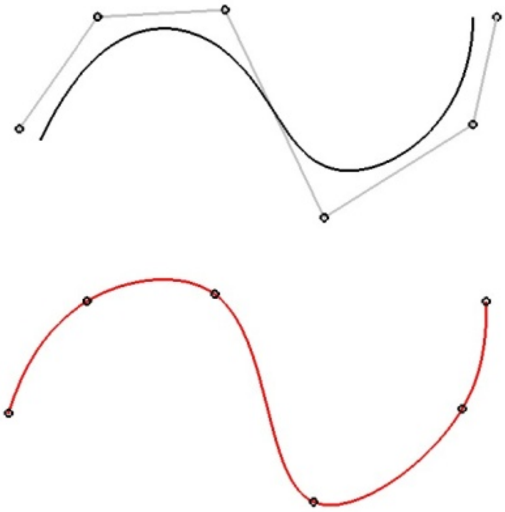

Abbildung 3 Approximations- und Interpolationskurven.

Der Casteljau-Algorithmus

Als Beispiel für die Erzeugung von Freiformkurven wird hier der Casteljau-Algorithmus zur Erzeugung der Bezierkurven näher erklärt (siehe Abbildung 4):Der Benutzer wählt beliebig viele Punkte P_o, …, P_n (in unserem Beispiele sind es drei Punkte P_0, P_1, P_2). Der Algorithmus nimmt nun einen Parameterwert t (= Zahl) zwischen 0 und 1und bestimmt das Verhältnis von t und dem Rest bis 1, dh:

$$t \ : \ 1-t = \frac{t}{1-t}$$

In unserem Beispiel ist *t = 2/3*

$$t = \frac{2}{3} = 0{,}66666\ldots = \ 0.\dot{6}$$

t vehält sich zu *1 – t* verhält wie 2 *: 1*. Dieses Verhältnis überträgt man auf die Verbindungsstrecken zweier aufeinanderfolgender Basispunkte und erhält damit n neue Punkte, genau um einen Punkt weniger als am Anfang gegeben waren. Bei uns wären das die Punkte P_{01} und P_{12}. Mit diesen Punkten fährt man nun in gleicher Weise fort, bis nur mehr ein Punkt übrig bleibt. Dieser Punkt ist dann ein Punkt der gewünschten Bezierkurve. In unserem Beispiel wäre das der Punkt P = P_{012}. Werden ausreichend Parameterwerte t zwischen 0 und 1 gewählt, lässt sich die Kurve glatt einzeichnen.

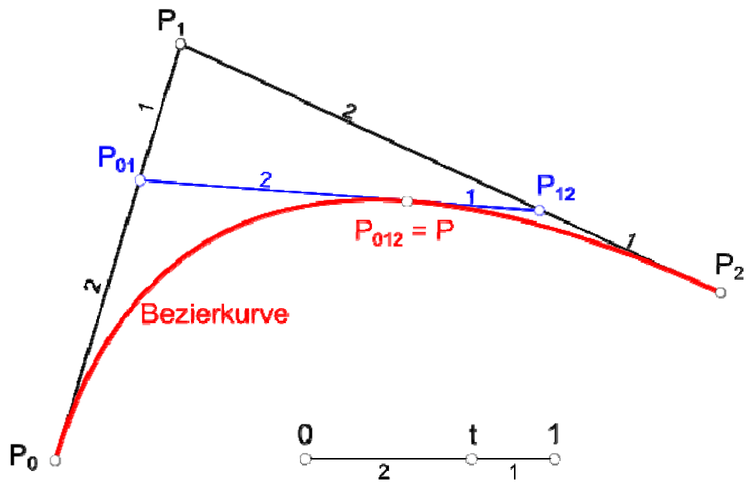

Abbildung 4 Der Casteljau-Algorithmus für Bezierkurven am Beispiel für drei Basispunkte P_0, P_1, P_2.

Eigenschaften

- Die Kurve geht immer durch den ersten und letzten Punkt P_0 und P_n.
- Die Kurve besitzt die Verbindungsgeraden der ersten und letzten beiden Punkte als Tangenten, (P_0P_1) und ($P_{n-1}P_n$).
- Die Verbindungsgerade der vorletzen beiden Punkte im Algorithmus stimmt mit der Tangente der Kurve überein (in Abbildung 4 ist das die Gerade P_{01} P_{12}).
- Bei 3 Basispunkten P_0, P_1 , P_2 ist die Bezierkurve immer eine Parabel, außer $P_0P_1P_2$ ist eine Gerade.
- Alle neuen Punkte im Algorithmus ergeben sich immer durch Streckung mit dem Faktor t, z.B.: $\overline{P_0P_{01}} = t \cdot \overline{P_0P_1}$ oder $\overline{P_{01}P_{012}} = t \cdot \overline{P_{01}P_{12}}$

Lokale Kontrolle

Die Eigenschaft, dass sich bei Änderung einer der Kontrollpunkte nur ein Teil einer Kurve ändert, nennt man **Lokale Kontrolle** (Abbildung 5). Dieses wird dadurch ermöglicht, dass die Kurven aus mehreren Teilkurven zusammengesetzt werden, die an ihren Übergängen einen glatten Verlauf aufweisen (Splinekurven).

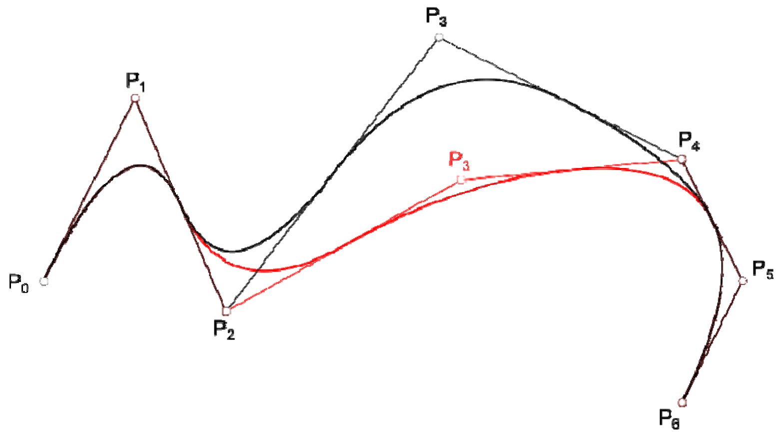

Abbildung 5 Zwei Splinekurven, die nur im Basispunkt P_3 einen Unterschied aufweisen. Im Bereich von P_3 unterscheiden sie sich, an den Rändern stimmen sie wieder überein.

Bemerkungen

- Bezierkurven besitzen keine lokale Kontrolle. Bei Änderung eines Basispunktes, ändert sich der ganze Kurvenverlauf.
- Aus dem obigen Grund sind Splinekurven entwickelt worden, da man bei ihnen eine bessere Kontrolle über den Kurvenverlauf besitzt.

NURBS-Kurven

„Nurbs“ sind spezielle Splinekurven, die eine große Vielfalt an Änderungsmöglichkeiten im Kurvenverlauf zulassen. Sie finden deswegen in vielen CAD-Programmen Anwendung.

Beispiel Türschild

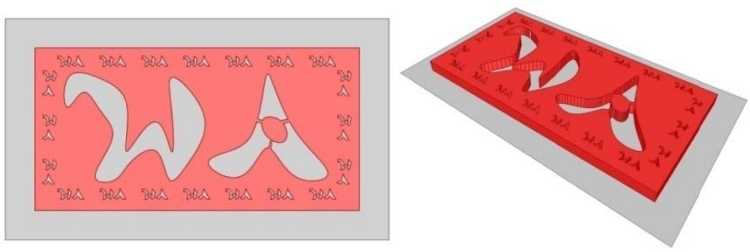

Abbildung 6 Türschild mit den Initialen W und A, die aus Freiformkurven erzeugt und anschließend extrudiert wurden.